2016 matematikos VBE uždavinių sprendimai

Bronislovas Burgis, 2016 06 15

I dalis

1 uždavinys

Tinka tik tas grafikas, kuris rodo, kad ties $x = 0$ funkcija yra neapibrėžta.

Teisingas atsakymas – C.

2 uždavinys

Prie pavėjui skrendančio lėktuvo variklių sukuriamo greičio reikia pridėti vėjo greitį, o iš prieš vėją skrendančio lėktuvo variklių sukuriamo greičio reikia atimti vėjo greitį. Lėktuvo variklių sukuriamas greitis yra 625 km/h, vėjo greitis yra 25 km/h.

Teisingas atsakymas – A.

3 uždavinys

$$\frac{2+2+3+4+5+9+9+10}{8} = 5{,}5.$$

Teisingas atsakymas – C.

4 uždavinys

$$\left|3-\sqrt{8}\right| - \left|\sqrt{8}-4\right| = 3-\sqrt{8}+\sqrt{8}-4 = -1.$$

Teisingas atsakymas – B.

5 uždavinys

$$2 \cdot q^2 = 18; \quad q = 3; \quad b_2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Teisingas atsakymas – B.

6 uždavinys

Pirmas būdas

$$h = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}; \quad S = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Antras būdas

$$p = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6; \quad S = \sqrt{6 \cdot (6-4) \cdot (6-4) \cdot (6-4)} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Teisingas atsakymas – A.

7 uždavinys

Pirmas būdas

Patikrinti duotus atsakymus ir pasirinkti.

Antras būdas

$$(x-3)(x-7) = 21; \quad x^2 - 3x - 7x + 21 = 21; \quad x^2 - 10x = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 10.$$

Teisingas atsakymas – B.

8 uždavinys

Pritaikius nuolaidą, trys bandelės kainuoja

$$1 - \frac{1 \cdot 40}{100} = 0{,}6 \text{ euro}.$$

Viena bandelė kainuoja 0,2 €.

Teisingas atsakymas – C.

9 uždavinys

Pirmas būdas
Intervalų metodas.

Antras būdas
Parabolės $y = x^2 - x$ grafikas.

Teisingas atsakymas – D.

10 uždavinys

Pirmas būdas
Patikrinti ir atmesti netinkamus atsakymus.

Antras būdas

$$9^{x+1} = 3^{4x-2}; \qquad 3^{2x+2} = 3^{4x-2}; \quad 2x + 2 = 4x - 2; \quad 2x = 4; \quad x = 2.$$

Teisingas atsakymas – D.

II dalis

11.1 uždavinys

Pirmas būdas

$$p = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15; \quad S = \sqrt{15(15 - 5)(15 - 12)(15 - 13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 30.$$

Antras būdas

(Žr. 11.3) $\begin{cases} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 12^2 - (13 - x)^2 \end{cases}; \quad 144 - 169 + 26x - x^2 - 25 - x^2 = 0;$

$$x = \frac{25}{13}. \qquad h = \sqrt{25 - \left(\frac{25}{13}\right)^2} = \frac{60}{13}; \qquad S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{60}{13} = 30.$$

11.2 uždavinys

$$13^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot \cos(\angle ABC); \quad \cos(\angle ABC) = 0.$$

Trikampis yra statusis.

Pasitikrinti 11.1: $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$

11.3 uždavinys

Pirmas būdas

(Žr. 11.1, 11.2)

$$S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h; \quad h = \frac{60}{13}.$$

Antras būdas

Žr. 11.1 antrą variantą.

12.1 uždavinys

$$d = a + 19 - a = 19.$$

12.2 uždavinys

Pirmas būdas

(Žr. 12.1)

$$a = 4 + 19 = 23.$$

Antras būdas

$$\frac{4 + a + 19}{2} = a; \qquad 23 + a = 2a; \quad a = 23.$$

13.1 uždavinys

$$900 + \frac{900 \cdot 10}{100} = 990.$$

13.2 uždavinys

(Žr. 13.1)

$$\frac{900 \cdot 0{,}05}{100} \cdot x = 90; \quad 0{,}45x = 90; \quad x = \frac{90}{0{,}45} = 200 \text{ dienų}.$$

14.1 uždavinys

Pirmose trijose pozicijose (skaičiuojant pozicijas nuo vyriausios skaičiaus skilties) gali būti bet kuris iš tų trijų skaitmenų, todėl susidaro $3^3 = 27$ triženkliai skaičiai. Ketvirtoje pozicijoje turi būti 1 arba 5 – du variantai, todėl iš viso keturženklių nelyginių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 5, 8 yra $27 \cdot 2 = 54$.

14.2 uždavinys

Iš 5 dalijasi tik tie skaičiai, kurių jauniausioje skiltyje yra 5. Vadinasi, tokių skaičių yra (žr. 14.1) 27.

15 uždavinys

Abi rodiklinės funkcijos ($\varphi(x) = 16^x$ ir $g(x) = 4^x$ yra monotoniškai didėjančios, jų sumos reikšmių aibė yra $(0;\ +\infty)$, todėl funkcijos $f(x)$ reikšmių aibė yra $(-2;\ +\infty)$. Vadinasi, šios funkcijos grafikas Ox ašį kerta vieną kartą (taške $x = 0$).

16.1 uždavinys

$$h(x) = f(x+1); \quad h(x) = (x+1)^2; \quad h(x) = x^2 + 2x + 1; \quad h(1) = 4.$$

16.2 uždavinys

$$g\big(f(x)\big) = (x^2) + 1; \quad x^2 + 1 = 2; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1.$$

III dalis

17.1 uždavinys

$$BD^2 = 6^2 + 8^2; \qquad BD = 10.$$

17.2 uždavinys

$$\angle BDE = 90°.$$

Nes tai $\angle BDC + \angle BDA$.

17.3 uždavinys

$$S = S_{ABD} + S_{DEF} + S_{DBE}; \qquad S = 24 + 24 + \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 48 + 25\pi.$$

18.1 uždavinys

$$f'(x) = 6x + 20x^3 + \pi\sin(\pi x); \qquad f'(0) = 0.$$

18.2 uždavinys

$$f'(-x) = -6x - 20x^3 - \pi\sin(\pi x) = -(6x + 20x^3 + \pi\sin(\pi x)).$$

Funkcija $f'(x)$ yra nelyginė.

18.3 uždavinys

$$f(2) + \int_0^1 f(x)dx = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^4 - \cos(2\pi) + \left(x^3 + x^5 - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 12 + 80 - 1 + (1 + 1) = 93.$$

19.1 uždavinys

$$\begin{cases} 2+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x>-2 \\ x<1 \end{cases}; \qquad -2<x<1.$$

19.2 uždavinys

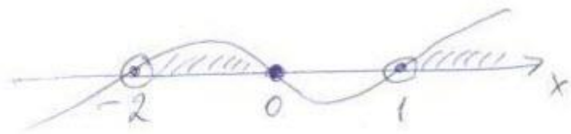
$$f(x) = 4\log_4(2+x) + \log_2(1-x);$$

$$f'(x) = \frac{4}{(2+x)\cdot\ln 4} + \frac{1}{(1-x)\cdot\ln 2}\cdot(-1) = \frac{2}{(2+x)\cdot\ln 2} - \frac{1}{(1-x)\cdot\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{2-2x-2-x}{(2+x)(1-x)}\right) = \frac{3}{\ln 2}\cdot\frac{x}{(x+2)(x-1)}.$$

19.3 uždavinys

$$\frac{3}{\ln 2}\cdot\frac{x}{(x+2)(x-1)} \geq 0;$$



Intervalų metodu: $x \in (-2; 0] \cup (1;\ +\infty)$. (Žr. 19.1 – apibrėžimo sritį)

Atsakymas: $\boldsymbol{x \in (-2; 0]}$**.**

20.1 uždavinys

$$\frac{12\cdot 4{,}25}{100} = 0{,}51.$$

20.2 uždavinys

Nugriebė $\boldsymbol{x}$ kilogramų grietinėlės. Joje buvo $\frac{x\cdot 20}{100} = 0{,}2x$ kilogramo riebalų. Pieno liko $(12-x)$ kilogramų ir tame piene liko $(0{,}51-0{,}2x)$ riebalų.

$$(12 - x) \quad — \quad 100\%;$$

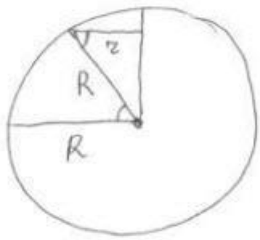
$$(0{,}51 - 0{,}2x) \quad — \quad 2{,}5\%.$$

$$(0{,}51 - 0{,}2x) \cdot 100 = (12 - x) \cdot 2{,}5; \quad 51 - 20x = 30 - 2{,}5x;$$

$$17{,}5x = 21; \quad x = \frac{21}{17{,}5} = 1{,}2.$$

Atsakymas: Nugriebė 1,2 kg grietinėlės.

21.1 uždavinys



$$R = 6380; \quad r = R \cdot cos56°; \quad r = 6380 \cdot 0{,}6 = 3828; \quad C = 2\pi r;$$

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3828 = 24039{,}84 \text{ km}.$$

21.2 uždavinys

$$L = 24039{,}84 \cdot \frac{7}{180} = 934{,}882(6)\ km.$$

$$T = \frac{934{,}882(6)}{90} = 10{,}387595(185) \approx 10\ h.$$

22.1 uždavinys

$$C_{10}^{6} = C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

22.2 uždavinys

Pirmas būdas

$$P(A) = \frac{C_9^6}{C_{10}^6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Antras būdas

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}); \quad P(A) = 1 - \frac{C_9^5 \cdot C_1^1}{C_{10}^6} = 1 - \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1}{210} = 1 - \frac{126}{210} = 0{,}4.$$

22.3 uždavinys

(Žr. 22.3)

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}54 + 0{,}12 = 0{,}66.$$

23 uždavinys

Tarkime, kad plaukikių greičiai (metrais per sekundę) yra atitinkamai $R,\ J,\ D$.
Galvodami apie plaukikių distancijoje sugaištą laiką Rūtos ir Julijos finišų momentais, sudarome lygčių sistemą ir išsprendžiame ją santykio $\frac{R}{D}$ atžvilgiu:

$$\begin{cases} \frac{100}{R} = \frac{98}{J} \\ \frac{100}{J} = \frac{99}{D} \end{cases}; \quad J = \frac{98 \cdot R}{100}; \quad \frac{10000}{98 \cdot R} = \frac{99}{D}; \quad \frac{R}{D} = \frac{10000}{98 \cdot 99}.$$

Tarkime, kad Rūtos finišo momentu Džesikai iki finišo buvo likę ***x*** metrų.

$$\frac{100}{R} = \frac{100 - x}{D}; \quad \frac{R}{D} = \frac{100}{100 - x}; \quad \frac{10000}{98 \cdot 99} = \frac{100}{100 - x}; \quad 100 - x = \frac{98 \cdot 99}{100};$$

$$x = 100 - \frac{98 \cdot 99}{100}; \quad x = 2{,}98 \text{ m}.$$